**FOURIER SERIES CONCEPTS**

หลักการวิเคราะห์อนุกรมฟูเรียร์ และการแทนสัญญาณในรูปสมการคณิตศาสตร์ที่ประกอบด้วย องค์ประกอบย่อยๆทางความถี่ (Harmonics) เทคนิคการประมาณสมการคณิตศาสตร์ ในรูปอนุกรมขององค์ประกอบฟังก์ชั่น Sine และ Cosine ที่สามารถใช้แทนปรากฎการณ์ทางไฟฟ้า (Phenomena) ถูกคิดค้นและพัฒนาโดย Jean Baptiste Joseph Fourier ในปี 1807 ขณะที่ Joseph Fourier กำลังทำการทดลองและพัฒนาเกี่ยวกับ)Heat Conduction) ทฤษฎีอนุกรมของฟูเรียร์ไม่ได้รับการยอมรับเท่าที่ควรในขณะนั้นและยังคงไม่ได้รับความสนใจเรื่อยมาจนกระทั่งเข้าสู่กลางศตวรรษที่18 ทฤษฎีดังกล่าวได้รับการยอมรับในภายหลังและได้ถูกนำไปใช้อย่างแพร่หลายในงานด้านต่างๆ โดยนักวิทยาศาสตร์และวิศวกร เช่นในการศึกษาเกี่ยวกับ คาบเวลา (Periodicities) เมื่อกระแสน้ำขึ้นสู่ระดับสูงสุด การโคจรของอุกาบาต แสงส่องสว่างของดวงดาว (Star Brightness) และปรากฎการณ์ธรรมชาติที่เกี่ยวข้องกับไฟฟ้า ในเวลาต่อมา เทคนิคต่างๆได้ถูกพัฒนาสำหรับการคำนวณหาค่าสัมประสิทธิ์ของอนุกรมฟูเรียร์ (Coefficients)

**Signal Terminology:**

**Signal** หมายถึง สัญญาณ สัญลักษณ์ หรือการคาดเดา การส่งข้อมูลหรือข้อความ การส่งข้อมูลอิเล็กทรอนิกส์ครั้งแรกในรูปแบบรหัสมอร์ส โดยทั่วไปสัญญาณประกอบด้วยกันสองรูปแบบ รูปแบบที่หนึ่ง คือ การวัดหรือสังเกตหรือมีคุณสมบัติทางกายภาพของปรากฏการณ์ที่มีข้อมูลเกี่ยวกับปรากฏการณ์ดังกล่าว รูปแบบอื่นๆ สัญญาณถูกสร้างโดยระบบที่มนุษย์สร้างขึ้นและมีการเข้ารหัสข้อมูล สัญญาณอาจแตกต่างกันตามช่วงเวลาหรือพื้นที่ การดำรงชีวิตประจำวันเต็มไปด้วยการปรากฏตัวของสัญญาณและไม่เพียงเกิดขึ้นในระบบที่มนุษย์สร้างขึ้น แต่ยังปรากฏอยู่ตามธรรมชาติ

Chart

Description automatically generated

Figure 1.1 The average monthly air temperature at Recife Brazil. [*Adapted from Chatfield, fig. 1.2.*]

การวัดอุณหภูมิของอากาศเมื่อเวลาผ่านไป ดังแสดงในรูป Figure 1.1 การศึกษาความผันผวนของอุณหภูมิ ทำให้เราทราบเกี่ยวกับลักษณะบางอย่างของสภาพแวดล้อมที่เปลี่ยนแปลงไป ปรากฏการณ์ที่ซับซ้อนมากขึ้น การพูดเป็นการสื่อสารส่งผ่านข่าวข้อมูลที่เปลี่ยนแปลงตามเวลา รูปที่ 1.2 แสดงตัวอย่างขนาดของรูปคลื่นที่เกี่ยวข้องกับสัญญาณเสียงพูด เสียงแต่ละคำมีลักษณะรูปคลื่นที่แตกต่างกัน ซึ่งถ่ายทอดข้อมูลที่แตกต่างกันไปขึ้นอยู่กับการรับรู้ได้ยินของผู้ฟัง

Diagram

Description automatically generated

Figure 1.2 Example of a speech waveform illustrating different sounds. The utterance is “should we chase…..” [*Adapted from Oppenheim, fig. 3.3.*]

ในระบบหัวใจและกล้ามเนื้อของมนุษย์ สัญญาณปรากฏในรูปแบบของแรงดันไฟฟ้า (ECG, EMG - Electromyographic) ในส่วนตัวอย่างสัญญาณเหล่านี้ วัตถุประสงค์ของการศึกษาสัญญาณหรือการวิเคราะห์สัญญาณ ต้องอาศัยเทคนิคการประมวลผลสัญญาณ เพื่อดึงข้อมูลที่เกี่ยวกับคุณลักษณะเฉพาะ ของการทำงานของหัวใจ และการทำงานของกล้ามเนื้อ รูปที่ 1.3 แสดงคลื่นไฟฟ้าหัวใจ (ECG) วัดจากท้องของหญิงตั้งครรภ์ ECG เกิดอยู่ตลอดทุกช่วงเวลา (Continuous Time Domain).

A picture containing sky, outdoor, antenna, slope

Description automatically generatedFigure 1.3 The abdominal ECG from a pregnant woman showing the maternal ECG waveform (m) and the fetal ECG waveform (f). [*Adapted from Inbar, fig. 8.*]

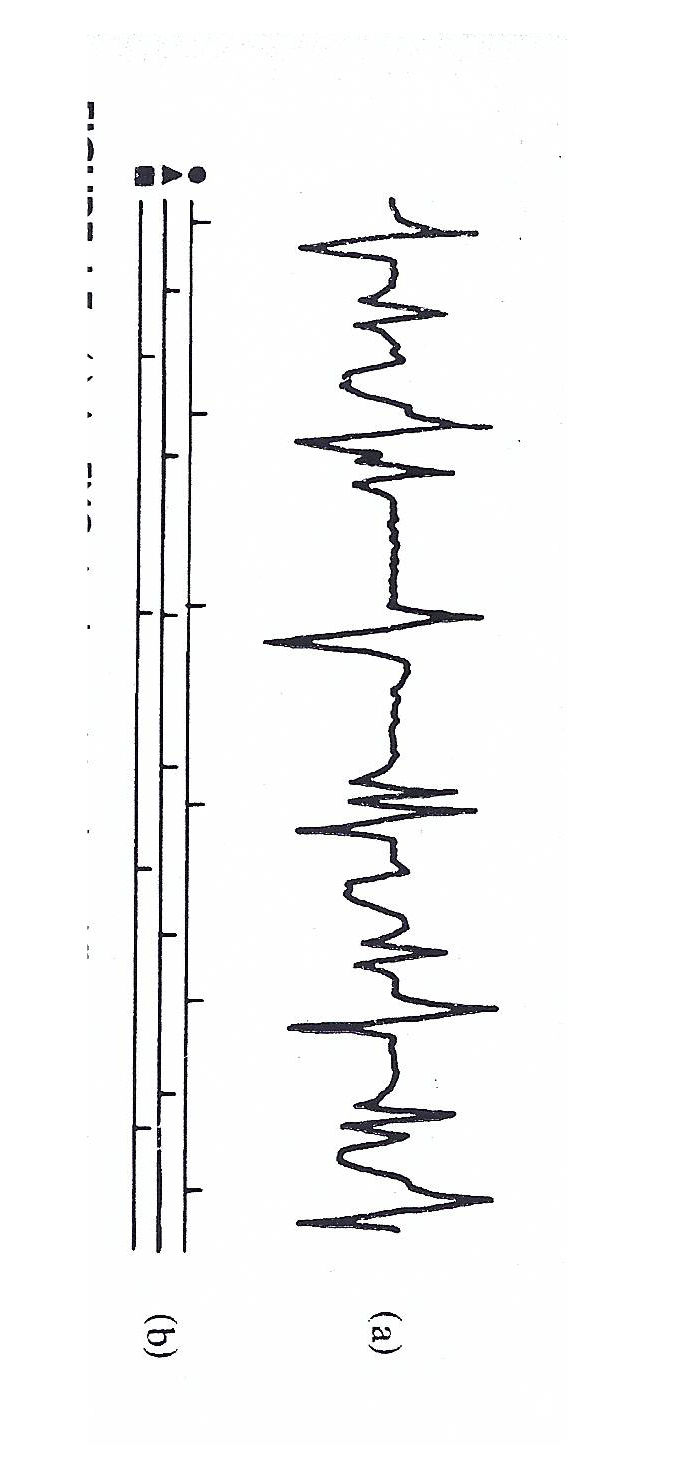


Figure 1.4 (a) An EMG signal containing three different waveform complexes. (b) Three impulse trains showing the times of occurrence of these complexes. [*Adapted from Guiheneuc et al., fig. I.*]

Text, letter

Description automatically generated

Figure 1.4 (a) An Electroencephalographic signal with sharp transients marked with dots.

[*Adapted from Glover et al., fig. I.*]

Fourier Series:

(1)

*x* (*t*) เป็นฟังก์ชันทางเวลาของสัญญาณ

คือ ขนาดของฮาร์มอนิก,

คือ ความถี่ฮาร์มอนิกที่อันดับ

คือ Fundamental frequency, คือ คาบเวลาของสัญญาณ

คือ เฟสของสัญญาณ

1. **ทดลองสร้างสัญญาณตามหลักการของอนุกรมฟูเรียร์**
   1. Square Wave มีขนาดของสัญญาณเท่ากับ  หน่วย และคาบเวลาเท่ากับ 1 วินาที เป็นสัญญาณที่จะถูกประมาณโดยอาศัย อนุกรมฟูเรียร์ การกระจายอนุกรมฟูเรียร์สำหรับสัญญาณ square wave ในรูปผลรวม Sine/Cosine

จะมีค่าประมาณเท่ากับ ผลรวมของสัญญาณฮาร์โมนิกส์ อันดับต่างๆ แบบ Odd Harmonics โดยมีขนาดของสัญญาณฮาร์โมนิกส์เท่ากับ, *k* คือ อันดับการเกิดของฮาร์โมนิกส์



การทดลองจะเริ่มต้นโดยการสร้างสัญญาณองค์ประกอบพื้นฐาน (Fundamental Component) ซึ่งเป็นสัญญาณไซน์ที่ถูกสุ่มตัวอย่างด้วยช่วงเวลาเท่ากับ 0.01 วินาที และมีความถี่ธรรมชาติเท่ากับ 1Hz แสดงรูปสัญญาณโดยรัน matlab script ที่กำหนด

close all;

clear all;

format compact;

whitebg('w');

clc; % clears the command window

f = 1;

T = 1/100;

t = 0:T:1;

y = 4/pi\*sin(2\*pi\*f\*t);

figure(1)

plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('FUNDAMENTAL COMPONENT OF THE SQUARE WAVE')



* 1. เพิ่มเทอมฮาร์โมนิกส์อันดับที่ 3 รวมเข้ากับองค์ประกอบพื้นฐาน (Fundamental Component) แสดงผลรูปสัญญาณรวมและสังเกตุการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับสัญญาณรวม

y = 4/pi\*(sin(2\*pi\*f\*t) + sin(2\*pi\*f\*3\*t)/3);

figure(2)

plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('FUND. COMPONENT AND THE 3rd HARMONIC')



* 1. เพิ่มเทอมฮาร์โมนิกส์อันดับที่ 5 รวมเข้ากับสัญญาณรวมที่ได้จากขั้นตอนที่ 1.2 แสดงผลรูปสัญญาณรวมและสังเกตุการเปลี่ยนแปลงที่เกิดขึ้นกับสัญญาณรวม เปรียบเทียบกับผลรวมที่ได้จากขั้นตอนที่ผ่านมา

y = 4/pi\*(sin(2\*pi\*f\*t) + sin(2\*pi\*f\*3\*t)/3 + sin(2\*pi\*f\*5\*t)/5);

figure(3)

plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('FIRST FIVE HARMONICS')



* 1. ขั้นตอนนี้ สัญญาณ square wave จะถูกประมาณ โดยเพิ่มเทอมฮาร์โมนิกส์ต่างๆ รวมเข้าด้วยกัน จนถึงฮาร์โมนิกส์อันดับที่ 15 แสดงรูปสัญญาณ พิจารณาและอธิบายผลการเปลี่ยนแปลงของสัญญาณรวมที่เกิดขึ้น และคำนวณหาค่าความผิดพลาดของการประมาณสัญญาณ (Mean Squared Error, MSE) โดยเปรียบเทียบระหว่างสัญญาณรวมที่ประกอบด้วย เทอมฮาร์โมนิกส์สูงสุดลำดับที่ 5 และสัญญาณรวมที่ประกอบด้วย เทอมต่างๆจนถึงเทอมฮาร์โมนิกส์สูงสุดลำดับที่ 15 ค่าความผิดพลาดที่คำนวณได้แตกต่างกันหรือไม่เมื่อเปรียบเทียบกัน

f =1;

T =1/100;

t =0:T:1;

x =zeros(size(t));

sw =square(2\*pi\*f\*t);

MeanSE= zeros(8,1);

h= 1;

for k =1:2:15

x =x+4\*sin(2\*pi\*f\*k\*t)/(pi\*k);

MeanSE(h)= mse(sw-x); %Call MSE function

if k ==5

y5 =x; % first five harmonics

elseif k ==11

y11 =x; % first eleven harmonics

elseif k ==15

y15 =x; % first fiftheen harmonics

end

h= h+1;

end; harOrd= [1:h-1];

figure; plot(t,sw,'g',t,y5,'b--',t,y11,'r:',t,y15,'m')

xlabel('Time, seconds'); ylabel('Amplitude')

title('Comparison between First Fifth-order and First Fifteenth-order Harmonics')



figure,

for i=1:length(harOrd)

plot(harOrd,MeanSE,':m', harOrd,MeanSE,'^b'),

xlabel('Harmonic Ord'),ylabel('MSE'),

title('\bf MSE vs Harmonic Orders'),

mark= [num2str(MeanSE(i))];

text(harOrd(i)-0.1,MeanSE(i)-0.01, mark,'FontSize',12)

hold on;

end

hold off;



1. **ความถูกต้องของการประมาณสัญญาณ** 
   1. ขั้นตอนนี้จะสร้างสัญญาณ SW จากการรวมสัญญาณเทอมต่างๆ ไปจนถึงสัญญาณฮาร์โมนิกส์อันดับที่ 19 โดยผลรวมของสัญญาณจากเทอมฮาร์โมนิกส์ต่างๆ ที่ถูกเพิ่มขึ้นในแต่ละขั้นจะถูกเก็บไว้ในพารามิเตอร์รูปเวกเตอร์และแมทตริกส์

พล๊อตแสดงสัญญาณรวมต่างๆ อย่างต่อเนื่องในรูปเดียวกันเพื่อแสดงให้เห็นถึงการเปลี่ยนแปลงจากสัญญาณจากสัญญาณ Sine ไปสู่สัญญาณ SW

*หมายเหตุ ปรากฎการณ์ที่เกิดขึ้น ณ จุดที่ไม่ต่อเนื่องทางขนาด (Amplitude Discontinuity) ของสัญญาณ หรือ ฟังก์ชั่น เมื่ออนุกรมฟูเรียร์ถูก*

*นำมาใช้ในการประมาณสัญญาณ ซึ่งปรากฎการณ์นี้เรียกว่า Gibbs' effect สามารถสังเกตุเห็นได้ ในรูปของการเกิดออสซิเลท ณ จุดที่ไม่*

*ต่อเนื่อง Gibbs' effect เกิดขึ้นได้สำหรับการประมาณ (Approximation) ฟังก์ชั่นที่ไม่ต่อเนื่องด้วย จำนวนเทอมที่จำกัดของฟังก์ชั่นที่ต่อเนื่อง*

*ในรูปอนุกรมฟูเรียร์ (Sum of sine or cosine functions)*

y = zeros(10,max(size(t)));

x = zeros(size(t));

for k=1:2:19

x = x + 4\*sin(2\*pi\*f\*k\*t)/(pi\*k);

y((k+1)/2,:) = x;

end

figure(5)

plot(t,y(1:2:9,:)'), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('The building of a square wave: Gibbs'' effect');



* 1. แสดงรูปสัญญาณรวมต่างๆ ที่ได้จากขั้นตอนที่ 2.1 ในลักษณะรูปพื้นผิว 3มิติ (3-D Surface plot) สังเกตุและอธิบาย ปรากฎการณ์ Gibbs effect ที่เกิดขึ้นในรูป 3มิติ

figure(6)

[har NY] = size(y); harv=[1:2:2\*har];

surf(t,harv,y);

xlabel('TIME, seconds'); zlabel('AMPLITUDE'); ylabel('# OF HARMONICS')

title([int2str((k-1)/2) ' Terms'])



%fsCon.m

%Fourier Series Concept of Squarewave Signal

%Modified on 01/28/22 by THA

close all; %delete all figures

clear all; %clear all parameters

format compact; %Setting background of figures

whitebg('w');

f = 1;

T = 1/100;

t = 0:T:1;

y = 4/pi\*sin(2\*pi\*f\*t);

figure(1)

plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE');grid;

title('FUNDAMENTAL COMPONENT OF THE SQUARE WAVE')

%Add in the 3rd-order harmonic

y = 4/pi\*(sin(2\*pi\*f\*t) + sin(2\*pi\*f\*3\*t)/3);

figure(2)

plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('FUND. COMPONENT AND THE 3rd HARMONIC')

%The 5th-order harmonic

y = 4/pi\*(sin(2\*pi\*f\*t) + sin(2\*pi\*f\*3\*t)/3 + sin(2\*pi\*f\*5\*t)/5);

figure(3)

plot(t,y), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('FIRST FIVE HARMONICS')

%Calculate MSE and compare between the first five and fifteen harmonics

x = zeros(size(t)); %

sw = square(2\*pi\*f\*t);

MeanSE= []; %MeanSE= zeros(8,1);

harOrd= [];

h= 1;

for k = 1:2:15

x = x+4\*sin(2\*pi\*f\*k\*t)/(pi\*k); %FS to be generated to match the original SW

mseTmp= mse(sw-x); %Call MSE function

MeanSE= [MeanSE mseTmp];

%MeanSE(h)= mseTmp;

if k ==5

y5 =x; % first five harmonics

elseif k ==11

y11 =x; % first eleven harmonics

elseif k ==15

y15 =x; % first fiftheen harmonics

end

harOrd= [harOrd h];

h= h+2;

end;

%harOrd= [1:h-1];

figure(4); plot(t,sw,'g',t,y5,'b--',t,y11,'r:',t,y15,'m')

xlabel('Time, seconds'); ylabel('Amplitude')

title('Comparison between First Five and First Eleven Harmonic')

%Calculate MSE values of harmonic orders

figure(5),

for i=1:length(harOrd)

plot(harOrd,MeanSE,':m', harOrd,MeanSE,'^b'),

xlabel('Harmonic Ord'),ylabel('MSE'),

title('\bf MSE vs Harmonic Orders'),

mark= [num2str(MeanSE(i))];

text(harOrd(i)-0.1,MeanSE(i)-0.01, mark,'FontSize',12)

hold on;

end

hold off;

%

y = zeros(10,max(size(t)));

x = zeros(size(t));

for k=1:2:19

x = x + 4\*sin(2\*pi\*f\*k\*t)/(pi\*k);

y((k+1)/2,:) = x;

end

figure(6)

plot(t,y(1:2:9,:)'), xlabel('TIME, seconds'); ylabel('AMPLITUDE')

title('The building of a square wave: Gibbs'' effect');

%

figure(7)

[har NY] = size(y); harv=[1:2:2\*har];

surf(t,harv,y);

xlabel('TIME, seconds'); zlabel('AMPLITUDE'); ylabel('# OF HARMONICS')

title([int2str((k-1)/2) ' Terms'])